Opakovací test z matematiky. (Jméno: Obor:)

1. Najděte definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x)=\sqrt{1-(\sin 2x)^2}$.

$D_f = \{x \in R;\ 1-(\sin 2x)^2 = \cos^2 2x \geq 0\} = R$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 2x} = |\cos 2x|$ (neboť $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, $\sqrt{a^2} = |a|, a \in R$)

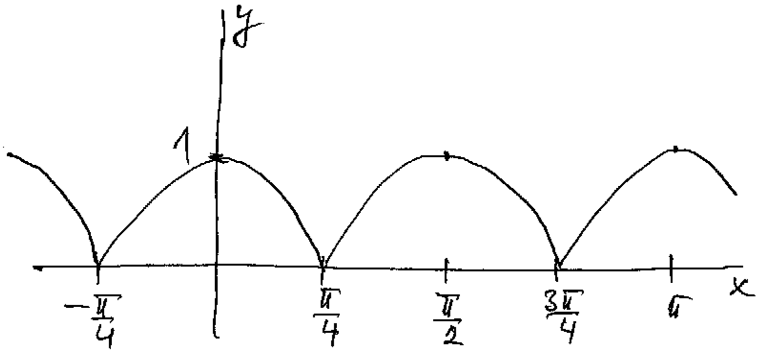
graf:

f – sudá funkce, π-periodická

$0 \leq f(x) \leq 1$

$f(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z$

$f(x) = 1 \iff x = k\frac{\pi}{2}, k \in Z$



2. Najděte všechna reálná čísla, která vyhovují nerovnici $\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{x-5}$.

(návod: nerovnici převedeme na nerovnici $\frac{a}{b} \geq 0$ nebo $\frac{a}{b} \leq 0$, pak již „srovnáváme znaménka výrazů a, b")

zde: $\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{x-5}$

$\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{x-5} \geq 0$

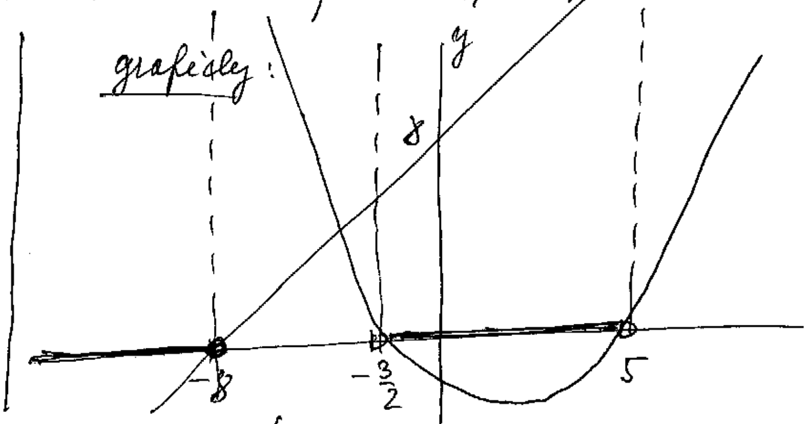
$\frac{x+8}{(2x+3)(x-5)} \leq 0$

(nulové body čitatele: $x = -8$

nulové body jmenovatele: $x = -\frac{3}{2}, x = 5$)

(tj. $x \neq -\frac{3}{2}, x \neq 5$)

graficky:



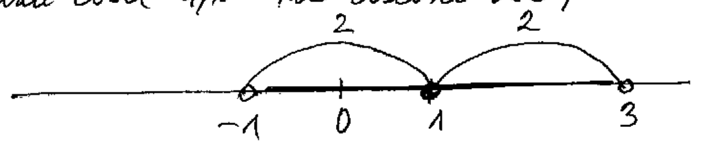
Řešení:

$K = (-\infty, -8\rangle \cup (-\frac{3}{2}, 5)$

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic $|x-1| < 2, |x+2| \geq 2$.

(návod: lze užít geometrického významu absolutní hodnoty – $|a-b|$ je vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose)

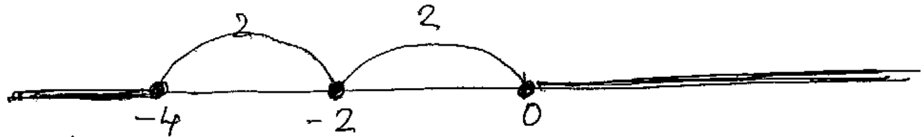
(i) $|x-1| < 2 \iff x \in (-1, 3)$



(ii) $|x+2| \geq 2 \iff$

$\iff |x-(-2)| \geq 2 \iff$

$\iff x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 0, +\infty)$



Řešení soustavy nerovnic: $x \in (-1,3) \cap ((-\infty,-4\rangle \cup \langle 0,+\infty)) = \underline{\langle 0, 3)}$

4. V intervalu $\langle 0, 2\pi)$ řešte rovnici $tg^2 x = \dfrac{1}{\cos x} + 1$.

$\cos x \neq 0$, tj. $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$ (v intervalu $\langle 0, 2\pi)$)

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} - 1 = 0 \quad \Big| \cdot \cos^2 x \quad (\text{a užijeme } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x)$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \qquad - \text{ substituce } \cos x = t$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{5}{3}\pi$
$x \in \langle 0, 2\pi)$
$\cos x = -1$ v $\langle 0, 2\pi) \iff x = \pi$

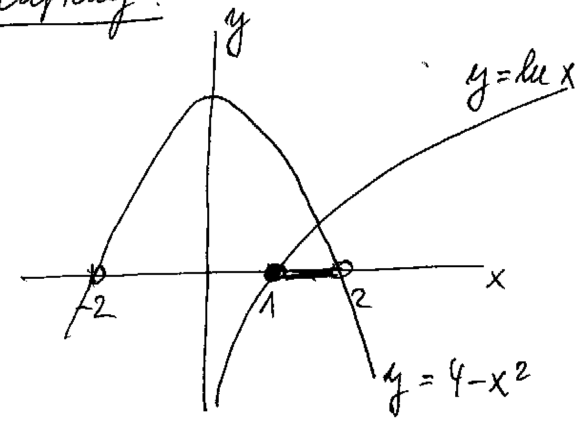
$$\underline{K = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi \right\}}$$

---

5. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\dfrac{\ln x}{4 - x^2} \geq 0$.

Množina řešení bude částí def. oboru funkce $\ln x$, tj. $(0, \infty)$, $x \neq 2$;
nerovnice $\dfrac{\ln x}{4 - x^2} \geq 0$ bude splněna pro taková $x \in (0, +\infty) - \{2\}$, pro která čitatel a jmenovatel zlomku mají stejná znaménka.

graficky:



tedy, $\underline{K = \langle 1, 2)}$

---

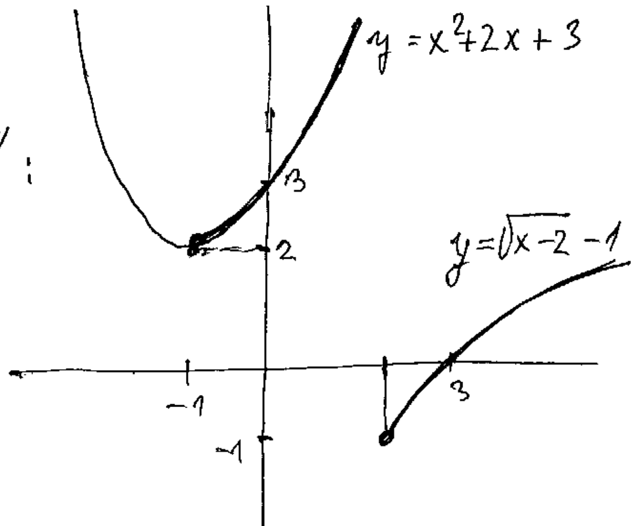
6. Najděte největší interval, na kterém je k funkce $f(x) = x^2 + 2x + 3$ rostoucí. Na tomto intervalu najděte k funkci f inversní funkci a nakreslete její graf.

$f(x) = (x+1)^2 + 2$ je rostoucí, $f(x) \geq 2$
v intervalu $\langle -1, +\infty)$, tedy prostá
a zde existuje k fci f funkce inversní:
$(\; f(x) = y \iff x = f^{-1}(y))$

$$(x+1)^2 + 2 = y$$
$$(x+1)^2 = y - 2 \quad (\geq 0)$$
$$x + 1 = \sqrt{y-2}$$
$$x = \sqrt{y-2} - 1$$

$x \leftrightarrow y$

f^{-1}: $\underline{y = \sqrt{x-2} - 1}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle 2, +\infty) = \mathcal{H}(f)$



7. Načrtněte grafy funkcí (a popište na grafu průsečíky grafu s osami, pokud existují).

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ $\left(= 1 + \dfrac{3}{x-2}\right)$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

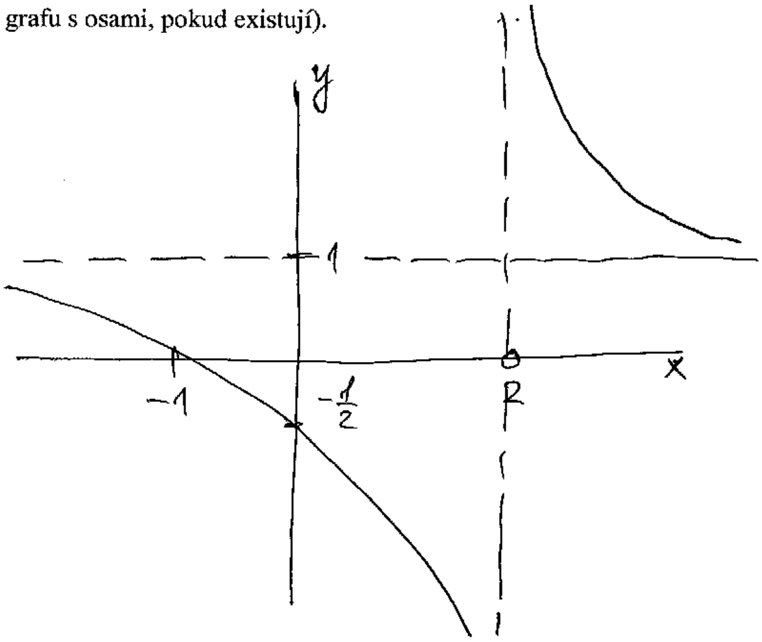
průsečíky s osami:

$f(x)=0 \iff x=-1$

$f(0) = -\frac{1}{2}$

(návod: graf „odvodíme" z grafu funkce $y=\frac{1}{x}$)

$\mathcal{H}f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



b) $g(x)=-1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

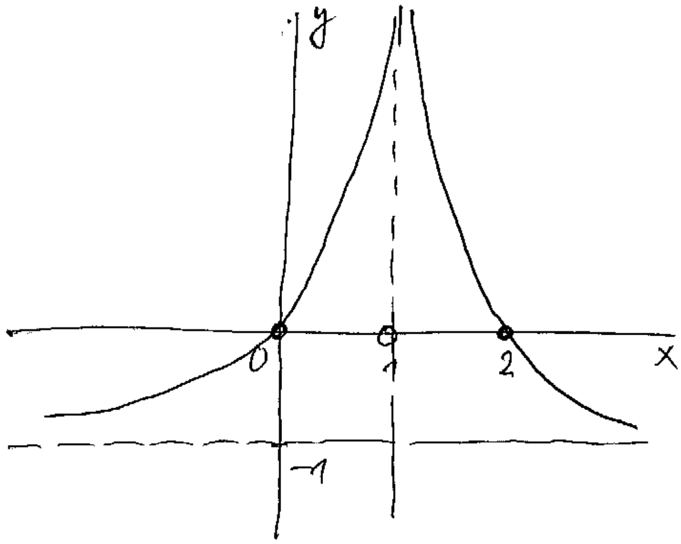
(graf odvodíme z grafu funkce $y=\frac{1}{x^2}$)

$\mathcal{D}g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g(x)=0 \iff (x-1)^2=1 \iff x=0 \vee x=2$

$g(0)=0$

$g(x) > -1$



c) $h(x)=-\ln|x|$

(„výchozí" graf je graf funkce $y=\ln x$)

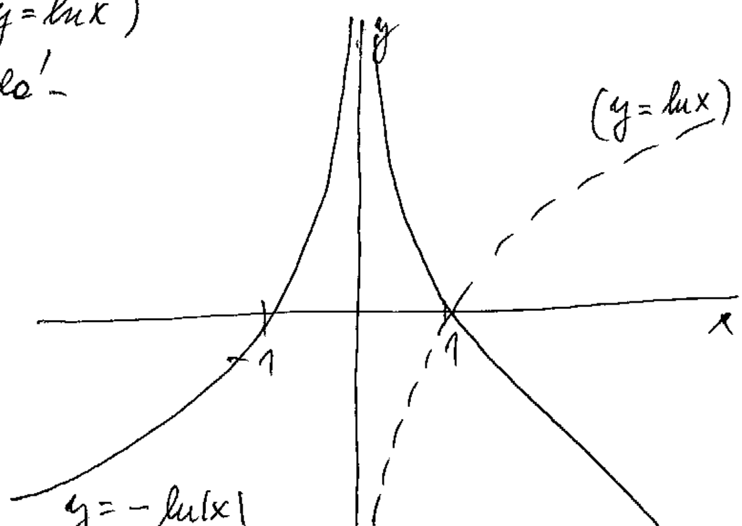
$\mathcal{D}h = \mathbb{R} - \{0\}$, $h(x)$ je funkce sudá –

(stačí vyřešit pro $x \in (0,+\infty)$)

(zde $h(x) = -\ln x$)

$h(x) = 0 \iff x=1 \vee x=-1$

průsečík s osou x graf nemá



8. Najděte parametrické vyjádření přímky p v prostoru, která prochází počátkem a je kolmá k rovině ρ, která má rovnici $x + y - 2z + 3 = 0$.

Označme: počátek $O[0,0,0]$, $\vec{s}_p$ - směrový vektor přímky p,
$\vec{n}_\rho$ - normálový vektor roviny ρ

Pak: $\vec{s}_p = \vec{n}_\rho = (1,1,-2)$, $O \in p$, tedy, parametrické vyjádření přímky p je: $x=t,\ y=t,\ z=-2t;\ t\in R$

---

9. Napište obecnou rovnici roviny ρ, která prochází body $A[-1,1,-1]$, $B[0,0,-2]$ a je rovnoběžná s přímkou p, jejíž parametrické vyjádření je $x = 1 + t,\ y = 2,\ z = 2 + t,\ t \in R$.

(i) V rovině ρ leží bod $B[0,0,-2]$ a vektory $\vec{s}_p = (1,0,1)$ a $B - A = (1,-1,-1)$.

(ii) Pak $\vec{n}_\rho = (1,0,1) \times (1,-1,-1)$
$= (1,2,-1)$

($\vec{u} \times \vec{v}$ značí vektorový součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$)

tedy, obecná rovnice roviny ρ:
$x + 2y - z + d = 0$
a d získáme dosazením B:
$-(-2) + d - 0 \Rightarrow d = -2$

tj. ρ: $x + 2y - z - 2 = 0$

nebo, najdeme parametrického vyjádření roviny ρ:

$(x,y,z) = (0,0,-2) + t(1,0,1) + s(1,-1,-1)$,
$t,s \in R$

tj. $x = t + s$
$y = -s$
$z = -2 + t - s$

a odtud (vyloučením parametrů) opět dostaneme rovnici

$x + 2y - z - 2 = 0$

---

10. Napište obecnou rovnici přímky p v rovině, která prochází bodem $A[2,-1]$ a středem kružnice k, jejíž rovnice je $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$.

(i) středový tvar rovnice kružnice k (doplněním na čtverec)
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$, tedy $S[1,2]$

(ii) pak směrový vektor p: $\vec{s}_p = A - S = (1,-3)$
a odtud $\vec{n}_p = (3,1)$ (například)

obecná rovnice p: $3x + y + c = 0$
c dosazením souřadnic bodu $A[2,-1]$: $6 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = -5$,

tedy: p: $3x + y - 5 = 0$